Correction SIGMA n°3C

Partie I : Modèle de population saisonnière

$T \in \mathbb{N}^*$ = durée maximal de la saison.
τ est la variable aléatoire égale à la durée de la saison. Ainsi, $\tau(\Omega) = [\![1, T]\!]$ et $[\tau = t]$ =« la saison s'arrête à la date t »

A un instant t :

— la génération d'insectes s'éteint en déposant des œufs

— $N(t)$ = nombre moyen d'œufs produits à l'instant t.
Un individu produit en moyenne α œufs, avec $\alpha > 0$.

— $p(t)$ = proportion des œufs pondus à l'instant t qui rentrent en diapause.

— Les œufs qui ne sont pas entrés en diapause éclosent à $t + 1$.

— $D(t)$ = nombre d'œufs en diapause à l'instant t

On a $D(0) = 0$; $N(0) \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [\![0, T-1]\!]$, $0 < p(t) \leqslant 1$

1. (a) $D(t+1)$ est le nombre d'œufs en diapause à l'instant $t+1$
Il est égal au nombre d'œufs qui étaient en diapause à l'instant t (=$D(t)$) plus ceux qui rentrent en diapause à l'instant $t+1$ (=$p(t) \times N(t)$).
En effet, à la date t, il y a en moyenne $N(t)$ œufs pondus et la proportion des œufs pondus à qui rentrent en diapause est $p(t)$.

$$\boxed{D(t+1) = D(t) + p(t)N(t), \qquad \forall t \in [\![0, T-1]\!]}$$

(b) $N(t+1)$ est le nombre moyen d'œufs pondus à l'instant $t+1$.
Un individu produit en moyenne α œufs.
Le nombre d'individus à l'instant $t+1$ est égal au nombre d'œufs qui ont éclos c'est-à-dire $[1-p(t)]N(t)$. En effet, sur les $N(t)$ œufs pondus à la date t, la proportion de ceux qui éclosent est $1 - p(t)$.

$$\boxed{N(t+1) = \alpha(1-p(t))N(t), \qquad \forall t \in [\![0, T-1]\!]}$$

2. On suppose $\alpha \leqslant 1$.

(a) $\forall t \in [\![0, T-1]\!]$, on a $N(t+1) = \alpha[1-p(t)]N(t)$.
Or $0 < p(t) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant 1 - p(t) < 1$ et $0 < \alpha \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \alpha[1-p(t)] \leqslant 1$.

Ainsi,

$$\boxed{N(t+1) \leqslant N(t), \qquad \forall t \in [\![0, T-1]\!]}$$

(b) $\forall t \in [\![0, T-1]\!]$, $\quad N(t+1) = \alpha[1-p(t)]N(t) \leqslant (1-p(t))N(t)$ car $\alpha \leqslant 1$
$\qquad D(t+1) = D(t) + p(t)N(t)$

Donc $D(t+1) + N(t+1) \leqslant D(t) + p(t)N(t) + (1-p(t))N(t)$

$$\boxed{D(t+1) + N(t+1) \leqslant D(t) + N(t), \qquad \forall t \in [\![0, T-1]\!]}$$

(c) Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(t)$: « $D(t) + N(t) \leqslant N(0)$ » est vraie $\forall t \in [\![0, T]\!]$

Pour $t = 0$: $D(0) = 0$ donc $D(0) + N(0) = N(0) \leqslant N(0)$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie

Soit $t \in [\![0, T-1]\!]$. Supposons que $\mathcal{P}(t)$ est vraie.
$D(t+1) + N(t+1) \leqslant D(t) + N(t) \leqslant N(0)$: $\mathcal{P}(t+1)$ est vraie $\boxed{\forall t \in [\![0, T]\!],\ D(t) + N(t) \leqslant N(0)}$

(d) $\forall t \in [\![0,T]\!]$, $N(t) \geqslant 0$ donc $D(t) \leqslant D(t)+N(t)$.

D4après 2c), on a donc $\boxed{\forall t \in [\![0,T]\!],\ D(t) \leqslant N(0)}$

(e) On suppose que $p(0)=1$
i) Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(t)$: « $N(t)=0$ » est vraie $\forall t \in [\![1,T]\!]$

Pour $t=1$: $N(1)=\alpha(1-p(0))N(0)=0$ car $p(0)=1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie

Soit $t \in [\![1,T-1]\!]$. Supposons que $\mathcal{P}(t)$ est vraie : $N(t)=0$
$N(t+1)=\alpha(1-p(t))N(t)=0$: $\mathcal{P}(t+1)$ est vraie

$$\boxed{\forall t \in [\![1,T]\!],\ N(t)=0}$$

ii) $\forall t \in [\![0,T-1]\!]$, $D(t+1)=D(t)+p(t)N(t)=D(t)$
D est stationnaire à partir de $t=1$.
Or $D(1)=D(0)+p(0)N(0)=0+1.N(0)=N(0)$

Donc

$$\boxed{\forall t \in [\![1,T]\!],\ D(t)=N(0)}$$

<u>Autre méthode</u> :

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(t)$: « $D(t)=N(0)$ » est vraie $\forall t \in [\![1,T]\!]$

Pour $t=1$: $D(1)=D(0)+p(0)N(0)=0+1.N(0)=N(0)$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie

Soit $t \in [\![1,T-1]\!]$. Supposons que $\mathcal{P}(t)$ est vraie : $D(t)=N(0)$
$D(t+1)=D(t)+p(t)N(t)=D(t)=N(0)$: $\mathcal{P}(t+1)$ est vraie

$\boxed{\forall t \in [\![1,T]\!],\ D(t+1)=D(t)+p(t)N(t)=D(t)}$

iii) Le but est de maximiser le nombre d'œufs en diapause ie $D(t)$.
Or d'après 2d) $D(t) \leqslant N(0)$ et d'après 2e), ce majorant est atteint si $p(0)=1$.
Donc la meilleure stratégie est d'avoir $p(0)=1$ c'est-à-dire que

$\boxed{\text{les } N(0) \text{ œufs entrent en diapause immédiatement}}$.

3. **On suppose jusqu'à la fin que $\alpha > 1$.**

τ VA finie à valeurs dans $[\![1,T]\!]$ et on suppose que $P(\tau=t)>0$, $\forall t \in [\![1,T]\!]$.

(a) $(\tau=t) \subset (\tau \geqslant t)$ donc $P(\tau=t) \leqslant P(\tau \geqslant t)$. Comme $P(\tau=t)>0$,

$$\boxed{P(\tau \geqslant t)>0}$$

On définit $\boxed{H(t)=P_{[\tau \geqslant t]}(\tau=t)}$

(b) $H(t)=P_{[\tau \geqslant t]}(\tau=t)=\dfrac{P(\tau \geqslant t)\cap(\tau=t)}{P(\tau \geqslant t)}$ donc

$$\boxed{H(t)=\frac{P(\tau=t)}{P(\tau \geqslant t)}}$$

(c) $H(T)=\dfrac{P(\tau=T)}{P(\tau \geqslant T)}=\dfrac{P(\tau=T)}{P(\tau=T)}$ car $\tau(\Omega)=[\![1,T]\!]$ donc

$$\boxed{H(T)=1}$$

(d) Si $\tau \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,T]\!])$, $P(\tau=t)=\frac{1}{T}$ $\forall t\in[\![1,T]\!]$.
$P(\tau \geqslant t)=\sum_{k=t}^{T} P(\tau=k)=\sum_{k=t}^{T}\frac{1}{T}=(T-t+1)\times\frac{1}{T}$

Or $H(t)=\dfrac{P(\tau=t)}{P(\tau\geqslant t)}$ donc

$$\boxed{H(t)=\frac{1}{T-t+1}}$$

(e) Soit $\lambda_0=0<\lambda_1<\cdots<\lambda_T=1$ et $q_1=\lambda_1=\lambda_1-\lambda_0$, …, $q_T=\lambda_T-\lambda_{T-1}$

i) $\forall i\in[\![1,T]\!]$, $q_i=\lambda_i-\lambda_{i-1}>0$
$\sum_{i=1}^{T} q_i=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-\lambda_{i-1})=\lambda_n-\lambda_0=1-0=1$ par télescopage

OU :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{T} q_i&=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-\lambda_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i-\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i-1}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i-\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k \text{ en posant } k=i-1\\
&=\cancel{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i}+\lambda_n-\left(\cancel{\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k}+\lambda_0\right)\\
&=\lambda_n-\lambda_0=1-0=1\end{aligned}$$

Donc $q_i\leqslant 1$ (ou $q_i=\lambda_i-\lambda_{i-1}\leqslant\lambda_i\leqslant\lambda_n\leqslant 1$)

$$\boxed{(q_i)_{1\leqslant i\leqslant T} \text{ définit une loi de probabilité sur } [\![1,T]\!]}$$

ii) Si τ suit la loi précédente, on a $P(\tau=i)=q_i=\lambda_i-\lambda_{i-1}$,

$$\begin{aligned}P(\tau\geqslant t)&=\sum_{i=t}^{T}P(\tau=i)\\
&=\sum_{i=t}^{T}q_i\\
&=\sum_{i=t}^{T}\lambda_i-\lambda_{i-1}\\
&=\lambda_T-\lambda_{t-1}=1-\lambda_{t-1}\end{aligned}$$

Or $H(t)=\dfrac{P(\tau=t)}{P(\tau\geqslant t)}$ donc

$$\boxed{H(t)=\frac{\lambda_t-\lambda_{t-1}}{1-\lambda_{t-1}},\ \forall t\in[\![1,T]\!]}$$

iii) On suppose que $T\geqslant 2$ et que $\forall n\in[\![1,T]\!]$,

$$\lambda_{t+1}-\lambda_t\geqslant\lambda_t-\lambda_{t-1}$$

Alors si $t\in[\![1,T-1]\!]$, $\lambda_t-\lambda_{t-1}\leqslant\lambda_{t+1}-\lambda_t$
et $\lambda_{t-1}<\lambda_t$ donc $1-\lambda_{t-1}>1-\lambda_t$ d'où $\dfrac{1}{1-\lambda_{t-1}}<\dfrac{1}{1-\lambda_t}$.

Tous les termes étant positifs, $\dfrac{\lambda_t - \lambda_{t-1}}{1-\lambda_{t-1}} < \dfrac{\lambda_{t+1}-\lambda_t}{1-\lambda_t}$ c'est-à-dire $H(t) \leqslant H(t+1)$

$$\boxed{t \mapsto H(t) \text{ est croissante sur } \{1,2,\dots,T\}.}$$

On suppose désormais que H est croissante. Le but est de maximiser $E(\ln(D(\tau))$.

4. Etude d'un exemple simple : $T=2$, $H(1)=\frac{1}{2}$, $H(2)=1$, $\alpha=4$.

(a) i) D'après 3b) $H(1) = \dfrac{P(\tau=1)}{P(\tau\geqslant 1)} = P(\tau=1)$ car $\tau(\Omega)=\{1,2\}$. Comme $H(1)=\frac{1}{2}$,

$$\boxed{P(\tau=1)=\tfrac{1}{2}}$$

ii) $\tau(\Omega)=\{1,2\}$ et $P(\tau=1)=\frac{1}{2}=P(\tau=2)$ donc

$$\boxed{\tau \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1,2\}).}$$

(b) Si $D(1)$ et $N(1)$ sont fixés, comme $D(2)=D(1)+p(1)N(1)$, le maximum est atteint si $p(1)$ est maximal ie si

$$\boxed{p(1)=1}$$

(c) On suppose $p(1)=1$. Rappel : $\boxed{\begin{array}{l} D(t+1)=D(t)+p(t)N(t) \\ N(t+1)=\alpha[1-p(t)]N(t)\end{array}}$

D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} E(\ln D(\tau)) &= \ln(D(1))P(\tau=1)+\ln(D(2))P(\tau=2) \\ &= \tfrac{1}{2}\ln(D(1))+\tfrac{1}{2}\ln[D(1)+p(1)N(1)] \\ &= \tfrac{1}{2}\ln(D(1))+\tfrac{1}{2}\ln[D(1)+N(1)] \end{aligned}$$

Or $D(1)=p(0)N(0)$ car $D(0)=0$
et $N(1)=4[1-p(0)]N(0)$ car $\alpha=4$ donc $D(1)+N(1)=[4-3p(0)]N(0)$

$$\boxed{E(\ln D(\tau))=\tfrac{1}{2}\ln p(0)N(0)+\tfrac{1}{2}\ln[4-3p(0)]N(0)}$$

(d) φ est définie sur $[0,1]$ par $\varphi(x)=\frac{1}{2}\ln\Big((4-3x)N(0)\Big)+\frac{1}{2}\ln\Big(N(0)x\Big)$.

$\varphi(x)=\frac{1}{2}\ln(4-3x)+\frac{1}{2}\ln(x)+\ln N(0)$.

φ est dérivable sur $]0,1]$

$\forall x\in[0,1]$, $\varphi'(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{-3}{4-3x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{-3x+4-3x}{x(4-3x)}=\dfrac{2-3x}{x(4-3x)}$

Or $x\in]0,1]$ donc $x>0$ et $4-3x>0$

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(\frac{2}{3})$	$\searrow$	$\ln N(0)$

$\varphi(\frac{2}{3})=\frac{1}{2}\left(\ln 2\ln\frac{2}{3}\right)+\ln N(0)=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}+\ln N(0)$

(e) φ atteint son maximum en $\frac{2}{3}$ donc $\boxed{E\Big(\ln(D(\tau))\Big) \text{ atteint son maximum en } p^*(0)=\tfrac{2}{3}}$

Partie II : Transformation du problème

Par convention, $\sum_{t=1}^{0} h(t) = 0$

$D(t+1) = D(t) + p(t)N(t)$
$N(t+1) = \alpha[1-p(t)]N(t) = \alpha N(t) - \alpha p(t)N(t)$
$D(0) = 0,\ \alpha > 1$

5. Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(t)$: « $D(t)+N(t)>0$ » est vraie $\forall t \in [\![0,T]\!]$

   Pour $t=0$: $D(0)+N(0) = N(0) > 0$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie

   Soit $t \in [\![0,T-1]\!]$. Supposons que $\mathcal{P}(t)$ est vraie. En omettant les (t), $D+N>0$

   $D(t+1)+N(t+1) = D + pN + \alpha(1-p)N$

   Comme $D \geqslant 0$ et $n \geqslant 0$, on a $D>0$ ou $N>0$.

   • Si $D>0$, alors comme $pN \geqslant 0$ et $\alpha(1-p)N \geqslant 0$, $D(t+1)+N(t+1) \geqslant D+0$
   • Si $D=0$, alors $N>0$ et $D(t+1)+N(t+1) = \alpha N > 0$
   $\mathcal{P}(t+1)$ est vraie

$$\boxed{\forall t \in [\![0,T]\!],\ D(t)+N(t)>0}$$

On pose $X(t) = \dfrac{D(t)}{D(t)+N(t)}$ donc $D = X(D+N)$

6. Soit $t \in [\![0,T-1]\!]$. En omettant les (t) pour alléger les notations,

$$X(t+1) = \frac{D(t+1)}{D(t+1)+N(t+1)} = \frac{D+pN}{D+pN+\alpha(1-p)N}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{p+(1-p)X}{p+\alpha(1-p)+(1-\alpha)(1-p)X} \\ &= \frac{p(D+N)+(1-p)X(D+N)}{p(D+N)+\alpha(1-p)(D+N)+(1-\alpha)(1-p)X(D+N)} \\ &= \frac{pD+pN+(1-p)D}{pD+pN+\alpha(1-p)(D+N)+(1-\alpha)(1-p)D} \\ &= \frac{pN+D}{pD+pN+\alpha(1-p)N+(1-p)D} \end{aligned}$$

$$\boxed{X(t+1) = \frac{p(t)+[1-p(t)]X(t)}{p(t)+\alpha[1-p(t)]+[1-\alpha][1-p(t)]X(t)},\ \forall t \in [\![0,T-1]\!]}$$

7. Soit $\xi \in [0,1]$. Pour $x \in [0,1]$ on pose $\psi_\xi(x) = \dfrac{x+(1-x)\xi}{x+\alpha(1-x)+(1-\alpha)(1-x)\xi}$

   (a) $\psi_\xi(x) = \dfrac{(1-\xi)x+\xi}{(1-\alpha)(1-\xi)x+\alpha+(1-\alpha)\xi}$

   On pose $u(x) = (1-\xi)x+\xi \quad v(x) = (1-\alpha)(1-\xi)x+\alpha+(1-\alpha)\xi$
   $u'(x) = 1-\xi \quad v'(x) = (1-\alpha)(1-\xi)$

   $\forall x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}u'(x)v(x)-u(x)v'(x) &= (1-\xi)\Big((1-\alpha)(1-\xi)x+\alpha+(1-\alpha)\xi\Big)\\ &\qquad -(1-\alpha)(1-\xi)\Big((1-\xi)x+\xi\Big)\\ &= (1-\xi)(1-\alpha)\Big[(1-\xi)x+\xi)-((1-\xi)x+\xi)\Big]+(1-\xi)\alpha\\ &= (1-\xi)\alpha\end{aligned}$$

$\psi'_\xi = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ donc $\psi'_\xi(x) = \dfrac{(1-\xi)\alpha}{v^2(x)} \geqslant 0$ sur $[0,1]$.

$$\boxed{\psi_\xi \text{ est croissante sur } [0,1]}$$

(b) $\boxed{\psi_\xi(1)=1}$

(c) i) $\boxed{\psi_\xi(0) = \dfrac{\xi}{\alpha+(1-\alpha)\xi}}$ On pose $A(\xi)=\psi_\xi(0)$ Ainsi, $A(\xi) = \dfrac{\xi}{\alpha+(1-\alpha)\xi}$

ii) Soit $t \in [\![0, T-1]\!]$.

$A(X(t)) = \dfrac{X(t)}{\alpha+(1-\alpha)X(t)}$ donc avec $\xi = X(t \in [0,1]$, on a $A(X(t)) = \psi_\xi(0)$

$X(t+1) = \dfrac{p(t)+(1-p(t))X(t)}{p(t)+\alpha(1-p(t))+(1-\alpha)(1-p(t))X(t)} = \psi_\xi(p(t))$.

Or ψ_ξ est croissante sur $[0,1]$, et $0 \leqslant p(t) \leqslant 1$ donc $\psi_\xi(0) \leqslant \psi_\xi(p(t)) \leqslant \psi_\xi(1)$.

Comme $\psi_\xi(1)=1$,

$$\boxed{A(X(t)) \leqslant X(t+1) \leqslant 1}$$

$\boxed{A(X(t)) \leqslant X(t+1) \leqslant 1}$

iii) $A(\xi) = \dfrac{\xi}{\alpha+(1-\alpha)\xi}$ donc A dérivable sur $[0,1]$ et

$A'(\xi) = \dfrac{\alpha+(1-\alpha)\xi-(1-\alpha)\xi}{(\alpha+(1-\alpha)\xi)^2} = \dfrac{\alpha}{(\alpha+(1-\alpha)\xi)^2} > 0$

$\boxed{A \text{ est croissante sur } [0,1]}$

8. $\dfrac{D(\tau)}{\cancel{D(\tau-1)}}.\dfrac{\cancel{D(\tau-1)}}{D(\tau-2)}.\cdots.\dfrac{D(2)}{\cancel{D(1)}}.\dfrac{\cancel{D(1)}}{\cancel{N(0)}}.\cancel{N(0)} = D(\tau)$ (produit télescopique)

$$\boxed{D(\tau) = \frac{D(\tau)}{D(\tau-1)}.\frac{D(\tau-1)}{D(\tau-2)}.\cdots.\frac{D(2)}{D(1)}.\frac{D(1)}{N(0)}.N(0)}$$

On pose $\hat{R}(0) = \ln\dfrac{D(1)}{N(0)}$ et $\hat{R}(t) = \ln\dfrac{D(t+1)}{D(t)}$ pour $1 \leqslant t \leqslant T-1$

9. (a) D'après 8),

$$\begin{aligned}
E(\ln D(\tau)) &= E\left(\ln \frac{D(\tau)}{D(\tau-1)}.\frac{D(\tau-1)}{D(\tau-2)}\cdots.\frac{D(2)}{D(1)}.\frac{D(1)}{N(0)}.N(0)\right)\\
&= E\left(\ln\left(\prod_{t=1}^{\tau-1}\frac{D(t+1)}{D(t)}\times\frac{D(1)}{N(0)}\times N(0)\right)\right)\\
&= E\left(\sum_{t=1}^{\tau-1}\ln\frac{D(t+1)}{D(t)}+\ln\frac{D(1)}{N(0)}+\ln N(0)\right)\\
&= E\left(\sum_{t=1}^{\tau-1}\hat{R}(t)+\hat{R}(0)+\ln N(0)\right)
\end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance, on a donc :

$$\boxed{E(\ln D(\tau)) = \ln\big(N(0)\big)+E\left(\hat{R}(0)+\sum_{t=1}^{\tau-1}\hat{R}(t)\right)}$$

(b) Rappel : $X(t)=\dfrac{D(t)}{D(t)+N(t)}$ donc $X(t)\Big[D(t)+N(t)\Big]=D(t)$

$D(t+1)=D(t)+p(t)N(t)$

$N(t+1)=\alpha[1-p(t)]N(t)=\alpha N(t)-\alpha p(t)N(t)$

$D(0)=0,\ \alpha>1$

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha X(1)}{1+(\alpha-1)X(1)} &= \frac{\alpha X(1)\Big[D(1)+N(1)\Big]}{\Big[D(1)+N(1)\Big]+(\alpha-1)X(1)\Big[D(1)+N(1)\Big]}\\
&= \frac{\alpha D(1)}{D(1)+N(1)+(\alpha-1)D(1)}\\
&= \frac{\alpha D(1)}{N(1)+\alpha D(1)}
\end{aligned}$$

$D(1)=p(0)N(0)$
$N(1)=\alpha[1-p(0)]N(0)=\alpha N(0)-\alpha p(0)N(0)$ donc $N(1)+\alpha D(1)=\alpha N(0)$

Ainsi $\dfrac{\alpha X(1)}{1+(\alpha-1)X(1)}=\dfrac{\alpha D(1)}{\alpha N(0)}$ donc

$$\boxed{\frac{D(1)}{N(0)}=\frac{\alpha X(1)}{1+(\alpha-1)X(1)}}$$

(c) Comme $X(t+1)\Big[D(t+1)+N(t+1)\Big]=D(t+1)$, en multipliant numérateur et dénominateur par $\Big[D(t+1)+N(t+1)\Big]$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha X(t+1)}{X(t)\Big[1+(\alpha-1)X(t+1)\Big]} &= \frac{\alpha D(t+1)}{X(t)\Big[\cancel{D(t+1)}+N(t+1)+(\alpha\cancel{-1})D(t+1)\Big]}\\
&= \frac{\alpha D(t+1)}{X(t)\Big[N(t+1)+\alpha D(t+1)\Big]}
\end{aligned}$$

Or $N(t+1)+\alpha D(t+1)=\alpha\Big[N(t)+D(t)\Big]$

$$\frac{\alpha X(t+1)}{X(t)\Big[1+(\alpha-1)X(t+1)\Big]}=\frac{\alpha D(t+1)}{X(t)\times\alpha\Big[N(t)+D(t)\Big]}=\frac{D(t+1)}{X(t)\times\Big[N(t)+D(t)\Big]}=\frac{D(t+1)}{D(t)}$$

$$\boxed{\frac{D(t+1)}{D(t)} = \frac{\alpha X(t+1)}{X(t)\big[1+(\alpha-1)X(t+1)\big]},\ \text{pour } 1 \leqslant t \leqslant T-1}$$

si $x > 0$ et $y > 0$, on pose $u(x,y) = \ln\alpha - \ln x + \ln y - \ln(1+(\alpha-1)y)$

(d) $\hat{R}(0) = \ln\dfrac{D(1)}{N(0)} = \ln\dfrac{\alpha X(1)}{1+(\alpha-1)X(1)}$ d'après 9b

$= \ln\alpha + \ln X(1) - \ln(1+(\alpha-1)X(1))$

$u\big(1, X(1)\big) = \ln\alpha - \ln 1 + \ln X(1) - \ln(1+(\alpha-1)X(1))$

Donc $\boxed{\hat{R}(0) = u\big(1, X(1)\big)}$

(e) $\hat{R}(t) = \ln\dfrac{D(t+1)}{D(t)} = \ln\dfrac{\alpha X(t+1)}{X(t)\big[1+(\alpha-1)X(t+1)\big]}$

$= \ln\alpha + \ln X(t+1) - \ln X(t) - \ln\big[1+(\alpha-1)X(t+1)\big]$

$u\big(X(t), X(t+1)\big) = \ln\alpha - \ln X(t) + \ln X(t+1) - \ln(1+(\alpha-1)X(t+1))$

Donc $\boxed{\hat{R}(t) = u\big(X(t), X(t+1)\big) \text{ pour } 1 \leqslant t \leqslant T-1}$

(f) $E(\ln D(\tau)) = \ln N(0) + E\left(\hat{R}(0) + \sum_{t=1}^{\tau-1}\hat{R}(t)\right)$

$$\boxed{E(\ln D(\tau)) = \ln N(0) + E\left[u\big(1, X(1)\big) + \sum_{t=1}^{\tau-1} u\big(X(t), X(t+1)\big)\right]}$$

Maximiser $E(\ln D(\tau))$ revient à choisir, à chaque date t telle que $1 \leqslant t \leqslant \tau - 1$, la valeur de $X(t+1) \in [A(X(t), 1]$ qui rend maximale

$$E\left[u\big(1, X(1)\big) + \sum_{t=1}^{\tau-1} u\big(X(t), X(t+1)\big)\right]$$

Partie III : Programmation dynamique

10. Soit B un événement. $\mathbb{1}_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(a) $\mathbb{1}_B(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(\mathbb{1}_B = 1) = P(B)$ donc $\boxed{\mathbb{1}_B \hookrightarrow \mathcal{B}(P(B))}$

(b) $\mathbb{1}_{B\cap C}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \in B \cap C$

$\Leftrightarrow \omega \in B$ et $\omega \in C$

$\Leftrightarrow \mathbb{1}_B(\omega) = 1$ et $\mathbb{1}_C(\omega) = 1$

$\Leftrightarrow \mathbb{1}_B(\omega) \times \mathbb{1}_C(\omega) = 1$

car si $\mathbb{1}_B(\omega) \times \mathbb{1}_C(\omega) = 0$, alors $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$ ou $\mathbb{1}_C(\omega) = 0$.

$\boxed{\mathbb{1}_{B\cap C} = \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C}$

(c) On suppose que $0 < P(B) < 1$. Si Y VA finie on définit la VA $E_B(Y)$ par

$$\boxed{E_B(Y) = \frac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \frac{1}{P(\overline{B})}E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}}}$$

i) Par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} E_B(Y+Z) &= \frac{1}{P(B)}E((Y+Z)\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \frac{1}{P(\overline{B})}E((Y+Z)\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}} \\ &= \frac{1}{P(B)}\Big[E(Y\mathbb{1}_B) + E(Z\mathbb{1}_B)\Big]\mathbb{1}_B + \frac{1}{P(\overline{B})}\Big[E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}}) + E(Z\mathbb{1}_{\overline{B}})]\mathbb{1}_{\overline{B}} \\ &= \frac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \frac{1}{P(B)}E(Z\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \frac{1}{P(\overline{B})}E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}} + \frac{1}{P(\overline{B})}E(Z\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}} \end{aligned}$$

$\boxed{E_B(Y+Z) = E_B(Y) + E_B(Z)}$

ii) Par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} E(E_B(Y)) &= E\left(\frac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \frac{1}{P(\overline{B})}E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}}\right) \\ &= \frac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B)\times E(\mathbb{1}_B) + \frac{1}{P(\overline{B})}E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}})\times E(\mathbb{1}_{\overline{B}}) \end{aligned}$$

Or $\mathbb{1}_B \hookrightarrow \mathcal{B}(P(B))$ donc $E(\mathbb{1}_B) = P(B)$

$$\begin{aligned} E(E_B(Y)) &= \frac{1}{\cancel{P(B)}}E(Y\mathbb{1}_B)\times \cancel{P(B)} + \frac{1}{\cancel{P(\overline{B})}}E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}})\times \cancel{P(\overline{B})} \\ &= E\left(Y\mathbb{1}_B + Y\mathbb{1}_{\overline{B}}\right) \end{aligned}$$

$\boxed{E(E_B(Y)) = E(Y)}$ car $\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\overline{B}} = 1$

iii) $E_B(Y\mathbb{1}_B) = \dfrac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B\times\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \dfrac{1}{P(\overline{B})}E(Y\mathbb{1}_B\times\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}} \quad = \dfrac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B$

car $\mathbb{1}_B\times\mathbb{1}_{\overline{B}} = 0$

$$E_B(Y)\mathbb{1}_B = \left(\frac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \frac{1}{P(\overline{B})}E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}}\right)\times\mathbb{1}_B = \frac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B$$

$\boxed{E_B(Y\mathbb{1}_B) = E_B(Y)\mathbb{1}_B}$

11. On suppose dans cette question que quand $[\tau = T]$ est réalisé, on connait $X(1), \dots, X(T-1)$. Si on pose $x = X(T-1)$, le meilleur choix est de prendre pour $X(T)$ la valeur $y^*(x, T-1) \in [A(x), 1]$ qui maximise $u(x,y)$

   (a) $u(x,y) = \ln\alpha - \ln x + \ln y - \ln(1+(\alpha-1)y)$

   $$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{\alpha-1}{1+(\alpha-1)y} = \frac{1+(\alpha-1)y-(\alpha-1)y}{y[1+(\alpha-1)y]} = \frac{1}{y[1+(\alpha-1)y]} > 0$$

   La fonction $y \mapsto u(x,y)$ est croissante donc son maximum est atteint en 1

   $\boxed{y^*(x,T-1) = 1}$

   (b) $u(x,1) = \ln\alpha - \ln x - \ln(1+(\alpha-1))$ donc $\boxed{u(x,1) = -\ln x}$

12. On suppose maintenant que quand $[\tau \geqslant T-1]$ est réalisé, on connait $X(1), \dots, X(T-2)$. La stratégie est de choisir $X(T-1)$ et $X(T)$ pour maximiser $E\left(\displaystyle\sum_{t=1}^{\tau-1} u\Big(X(t), X(t+1)\Big)\right)$

   τ prend les valeurs $T-1$ et T avec les proba $P_{[\tau\geqslant T-1]}(\tau = T-1)$ et $P_{[\tau\geqslant T-1]}(\tau = T)$.

(a) • Si $\tau < T-1$, les deux membres de l'égalité valent 0 donc l'égalité est vraie.

• Si $\tau = T-1$, alors $\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} = 1$ et $\mathbb{1}_{[\tau=T]} = 0$ donc les deux membres valent $\displaystyle\sum_{t=T-2}^{T-2} u(X(t), X(t+1)) = u(X(T-2), X(T-1))$.

• Si $\tau = T$, alors $\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} = 1$ et $\mathbb{1}_{[\tau=T]} = 1$: les deux membres valent $\displaystyle\sum_{t=T-2}^{T-1} u(X(t), X(t+1)) = u(X(T-2), X(T-1)) + u(X(T-1), X(T))$.

$$\boxed{\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1)) = \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} u(X(T-2), X(T-1)) + \mathbb{1}_{[\tau=T]} u(X(T-1), X(T))}$$

(b) $\mathbb{1}_B E_B(Y) = E_B(\mathbb{1}_B.Y)$ donc avec $B = [\tau \geqslant T-1]$ et $Y = \displaystyle\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))$,

$$\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} E_{[\tau \geqslant T-1]} \left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1)) \right) = E_{[\tau \geqslant T-1]} \left(\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1)) \right)$$

D'après 12 a) et comme $\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \times \mathbb{1}_{[\tau=T]} = \mathbb{1}_{[\tau=T]}$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} E_{[\tau \geqslant T-1]} \left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1)) \right) \\ &\qquad = E_{[\tau \geqslant T-1]} \Big(\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}.u(X(T-2), X(T-1)) + \mathbb{1}_{[\tau=T]}.u(X(T-1), X(T)) \Big) \end{aligned}$$

(c) On pose $U = u(X(T-2), X(T-1))$, $V = u(X(T-1), X(T))$, $B = [\tau \geqslant T-1]$

On doit donc montrer que

$$E_B\Big(\mathbb{1}_B U + \mathbb{1}_{[\tau=T]} V\Big) = U.\mathbb{1}_B + \frac{P(\tau = T)}{P(\tau \geqslant T-1)} V.\mathbb{1}_B$$

Comme $E_B(Y+Z) = E_B(Y) + E_B(Z)$, on a

$$\boxed{E_B\Big(\mathbb{1}_B U + \mathbb{1}_{[\tau=T]} V\Big) = E_B(\mathbb{1}_B U) + E_B\Big(\mathbb{1}_{[\tau=T]} V\Big)}$$

Or par définition $E_B(Y) = \dfrac{1}{P(B)} E(Y \mathbb{1}_B) \mathbb{1}_B + \dfrac{1}{P(\overline{B})} E(Y \mathbb{1}_{\overline{B}}) \mathbb{1}_{\overline{B}}$, donc

• $$\begin{aligned} E_B(U.\mathbb{1}_B) &= \frac{1}{P(B)} E(U.\mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_B) \mathbb{1}_B + \frac{1}{P(\overline{B})} E(U.\mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_{\overline{B}}) \mathbb{1}_{\overline{B}} \\ &= \frac{1}{P(B)} E(U.\mathbb{1}_B) \mathbb{1}_B \\ &= \frac{U}{\cancel{P(B)}} \cancel{E(\mathbb{1}_B)}\, \mathbb{1}_B \\ &= U.\mathbb{1}_B \qquad \text{car } E(\mathbb{1}_B) = P(B) \end{aligned}$$

• $$E_B\Big(\mathbb{1}_{[\tau=T]} V\Big) = \frac{1}{P(B)} E\Big(\mathbb{1}_{[\tau=T]} V \times \mathbb{1}_B\Big) \mathbb{1}_B + \frac{1}{P(\overline{B})} E\Big(\mathbb{1}_{[\tau=T]} V \times \mathbb{1}_{\overline{B}}\Big) \mathbb{1}_{\overline{B}}$$

Or $\mathbb{1}_{[\tau=T]}.\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{[\tau=T]}.\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} = \mathbb{1}_{[\tau=T]\cap[\tau\geqslant T-1]} = \mathbb{1}_{[\tau=T]}$

Et $\mathbb{1}_{[\tau=T]}.\mathbb{1}_{\overline{B}} = \mathbb{1}_{[\tau=T]}.\mathbb{1}_{[\tau<T-1]} = 0$

Donc $E_B\Big(\mathbb{1}_{[\tau=T]}.V\Big) = \dfrac{1}{P(B)}E\Big(\mathbb{1}_{[\tau=T]}V\Big)\ \mathbb{1}_B$

$$= \frac{V}{P(B)}E\Big(\mathbb{1}_{[\tau=T]}\Big)\ \mathbb{1}_B$$

$$= \frac{V}{P(\tau\geqslant T-1)}P(\tau=T)\ \mathbb{1}_B$$

Donc $E_B\Big(\mathbb{1}_B U + \mathbb{1}_{[\tau=T]}V\Big) = U.\mathbb{1}_B + \dfrac{P(\tau=T)}{P(\tau\geqslant T-1)}V.\mathbb{1}_B$

$$\boxed{\begin{aligned}&E_{[\tau\geqslant T-1]}\Big(\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}u(X(T-2),X(T-1)) + \mathbb{1}_{[\tau=T]}u(X(T-1),X(T))\Big)\\ &\quad= u\Big(X(T-2),X(T-1)\Big).\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} + \frac{P(\tau=T)}{P(\tau\geqslant T-1)}.u\Big(X(T-1),X(T)\Big).\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\end{aligned}}$$

(d) On suppose que $X(T-1)$ est donné.
i) On veut maximiser $u(X(T-1),X(T))$ donc comme à la question 11a), on doit prendre $\boxed{X(T)=1}$

ii) On a vu que $u(x,1) = -\ln 1$ donc si $X(T)=1$, on a

$$\boxed{u\Big(X(T-1),X(T)\Big) = -\ln(X(T-1))}$$

(e) D'une part $P_{[\tau\geqslant T-1]}(\tau=T) = \dfrac{P([\tau\geqslant T-1]\cap[\tau=T])}{P(\tau\geqslant T-1)} = \dfrac{P(\tau=T)}{P(\tau\geqslant T-1)}$

D'autre part,

$1-H(T-1) = 1 - \dfrac{P(\tau=T-1)}{P(\tau\geqslant T-1)} = \dfrac{P(\tau\geqslant T-1)-P(\tau=T-1)}{P(\tau\geqslant T-1)} = \dfrac{P(\tau=T)}{P(\tau\geqslant T-1)}$

$$\boxed{P_{[\tau\geqslant T-1]}(\tau=T) = 1-H(T-1)}$$

On veut maintenant choisir la stratégie optimale à la date $T-2$.

(f) On pose $\Phi(y) = u\Big(X(T-2),y\Big) - (1-H(T-1))\ln y$

Ainsi, $\Phi(X(T-1)) = u\Big(X(T-2),X(T-1)\Big) - (1-H(T-1)\ln X(T-1)$

Or $1-H(T-1) = \dfrac{P(\tau=T)}{P(\tau\geqslant T-1)}$ et $u\Big(X(T-1),X(T)\Big) = -\ln(X(T-1))$

Donc $\Phi(X(T-1)) = u\Big(X(T-2),X(T-1)\Big) + \dfrac{P(\tau=T)}{P(\tau\geqslant T-1)} \times u\Big(X(T-1),X(T)\Big)$

Par ailleurs, avec 12 b) et 12c) on a

$$\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}E_{[\tau\geqslant T-1]}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1}u(X(t),X(t+1))\right)$$

$$= u\Big(X(T-2),X(T-1)\Big).\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} + \frac{P(\tau=T)}{P(\tau\geqslant T-1)}.u\Big(X(T-1),X(T)\Big).\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}$$

$$= \mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\left(u\Big(X(T-2),X(T-1)\Big) + \frac{P(\tau=T)}{P(\tau\geqslant T-1)}.u\Big(X(T-1),X(T)\Big)\right)$$

$$\boxed{\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}E_{[\tau\geqslant T-1]}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1}u(X(t),X(t+1))\right)=\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\Phi(X(T-1))}$$

Le but est de maximiser $E\left(\sum_{t=1}^{\tau-1}u\Big(X(t),X(t+1)\Big)\right)$ et comme $E(Y)=E(E_B(Y))$, on doit donc maximiser $E\left(E_{[\tau\geqslant T-1]}\left(\sum_{t=1}^{\tau-1}u\Big(X(t),X(t+1)\Big)\right)\right)$

$\boxed{\text{On doit choisir pour } X(T-1) \text{ la valeur } y^*(X(T-2),T-2)\in[A(X(T-2)),1] \text{ qui maximise } \Phi(y)}$

(g) $\Phi(y)=u\Big(X(T-2),y\Big)-(1-H(T-1)\ln y$ donc Φ est dérivable sur $]0,1]$ et
$\forall y\in]0,1]$, $\Phi'(y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}(X(T-2),y)-(1-H(T-1))\times\dfrac{1}{y}$

Or d'après 11a), $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1}{y}-\dfrac{\alpha-1}{1+(\alpha-1)y}$

$$\begin{aligned}\text{Donc}\quad \Phi'(y)= &= \cancel{\frac{1}{y}}-\frac{\alpha-1}{1+(\alpha-1)y}-(\cancel{1}-H(T-1))\times\frac{1}{y}\\ &=-\frac{\alpha-1}{1+(\alpha-1)y}+\frac{H}{y}\\ &=\frac{-y\Big[\alpha-1\Big]+H\Big[1+(\alpha-1)y\Big]}{y\Big[1+(\alpha-1)y\Big]}\\ &=\frac{H+(\alpha-1)(H-1)y}{y\Big[1+(\alpha-1)y\Big]}\end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi'(y)=\frac{H(T-1)-(\alpha-1)(1-H(T-1))y}{y\Big[1+(\alpha-1)y\Big]}}$$

$$\begin{aligned}\text{Ainsi, } \Phi'(y)\geqslant 0 &\Leftrightarrow H-(\alpha-1)(1-H)y\geqslant 0\\ &\Leftrightarrow (\alpha-1)(1-H)y\leqslant H\\ &\Leftrightarrow y\leqslant\frac{H}{(\alpha-1)(1-H)}\qquad\text{car } \alpha>1 \text{ et } H\leqslant 1 (H \text{ est une proba})\end{aligned}$$

On pose $B=\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))}$.

Ainsi, $\boxed{\Phi'(y)\geqslant 0\Leftrightarrow y\leqslant B}$

(h) Si $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))}\leqslant 1$ ie si $B\leqslant 1$,

Comme $y\in[A(X(T-2),1]$, reste à savoir si $A(X(T-2)\leqslant B$ ou pas....

- Si $A(X(T-2)\leqslant B$,

x	A		B		1
$\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\Phi(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Le maximum est atteint en $B = \dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))}$

• Si $B < A(X(T-2)$, on a $\Phi'(y) < 0$

x	A		1
$\Phi(x)$		$\searrow$	

Le maximum est atteint en $A(X(T-2))$

(i) Si $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \geqslant 1$, ie $B \geqslant 1$, on a $\Phi'(y) \geqslant 0$ donc

x	A		1
$\Phi(x)$		$\nearrow$	

Le maximum est atteint en 1

(j)
- Si $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \geqslant 1$, alors $y^*(X(T-2), T-2) = 1$
- Si $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \leqslant 1$, alors

$y^*(X(T-2), T-2) = \max\left(A(X(T-2)), \dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))}\right)$